

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

1° CICLO
URBINO, 2-12 LUGLIO 1962

ESCLUSIVITÀ PER LA VENDITA
EDIZIONI CREMONESE
ROMA

Lire 2.000.—

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE - C. I. M. E., 1962 - 1° CICLO

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

1° Ciclo - Urbino, 2-12 luglio 1962

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

- J. CERF** : Invariants des paires d'espaces. Applications à la topologie différentielle.
- A. HAEFLIGER** : Variétés feuilletées.
- M. KERVAIRE** : La methode de Pontryagin pour la classification des applications sur une sphere.
- S. SMALE** : Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

MICHEL KERVAIRE

LA METHODE DE PONTRYAGIN POUR LA
CLASSIFICATION DES APPLICATIONS SUR UNE SPHERE

ROMA - Istituto Matematico dell'Università

LA METHODE DE PONTRYAGIN POUR LA
CLASSIFICATION DES APPLICATIONS SUR UNE SPHERE.

Par Michel Kervaire (New York).

Soit $f : X \rightarrow S^n$ une application d'une espace X sur la sphère de dimension n . La classe d'homotopie de f est complètement caractérisée par la donnée de f sur l'image inverse $f^{-1}(V)$ d'une voisinage arbitrairement petit $V \subset S^n$. Plus précisément, si f, g sont deux applications $f, g : X \rightarrow S^n$ et si $f|_U = g|_U$ avec $U = f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$, alors f et g sont homotopes.

Démonstration. (Cf. Alexandroff-Hopf, Topologie)

On peut supposer que V est un disque (ouvert) plongé dans S^n . Soit alors $r : S^n \rightarrow S^n$ une application de degré 1 qui est homéomorphe sur V et envoie le complémentaire de V sur un point $a^* \in S^n$.

Comme r est homotope à l'identité, on a $r \circ f \simeq f$ et $r \circ g \simeq g$. Les hypothèses impliquent $r \circ f = r \circ g$. Q. E. D.

La méthode de Pontryagin (Cf. Smooth manifolds and their applications in homotopy theory, Trudy Mat. Inst. im. Steklov 45, 1955) du titre est basée sur la version 'infinitésimale' de la remarque ci-dessus.

Dans la suite X sera une variété différentiable (c. à. d. C^∞) compacte (avec ou sans bord). Il est commode de supposer que X est munie d'une métrique Riemannienne. Toute classe d'homotopie d'applications $X \rightarrow S^n$ contient des applications différentiables. On peut donc se limiter à considérer ces dernières. Dans le cas où $\dim X < n$, il n'y a qu'une seule classe d'homotopie. Dans toute la suite on supposera que $\dim X = n + k \geq n$.

Soit $f : X^{n+k} \rightarrow S^n$ une application différentiable. L'idée de

Pontryagin est de caractériser la classe d'homotopie de f par l'image inverse $f^{-1}(a)$ d'un point $a \in S^n$ et la dérivée df de f le long de $f^{-1}(a)$. C'est effectivement possible pourvu que df soit "non dégénérée" sur $f^{-1}(a)$.

Définition. On appelle point régulier $x \in X$ de l'application différentiable $f : X \rightarrow S^n$ un point où la dérivée df de f envoie le plan tangent à X en x sur le plan tangent à S^n en $f(x)$.

Définition. On appelle valeur régulière de $f : X \rightarrow S^n$ un point $a \in S^n$ tel que $f^{-1}(a)$ soit vide ou ne contienne que des points réguliers.

La classe d'homotopie d'une application différentiable $f : X \xrightarrow{n+k} S^n$ est caractérisée par la donnée de l'image inverse $f^{-1}(a)$ d'une valeur régulière $a \in S^n$ de f et de la dérivée de f le long de $f^{-1}(a)$.

On remarque tout d'abord que si $a \in S^n$ est valeur régulière de $f : X \xrightarrow{n+k} S^n$, alors $f^{-1}(a) = M^k$ est une sous-variété de X^{n+k} . Si X^{n+k} a un bord, M^k est (en général) une variété à bord, dont le bord est alors contenu dans le bord de X .

Si de plus, on suppose que $f|_{\partial X}$ (restriction de f au bord de X) admet également a comme valeur régulière, M^k rencontre le bord de X transversalement, i. e. le fibré normal à ∂M dans ∂X est la restriction à ∂M du fibré normal de M dans X . On remarque également que la donnée de la dérivée de f sur M^k , équivaut à la donnée d'une trivialisat[i]on φ^n du fibré normal de M dans X . (En particulier l'image inverse d'une valeur régulière d'une application a toujours un fibré normal trivial.)

Pour obtenir φ^k on prend un n -repère fixe du plan tangent $E = S^n$ en a . On observe que M_x , le plan tangent à M en $x \in M$,

est exactement le noyau de $df : T_x \longrightarrow E$ ($T_x =$ plan tangent à X en x). Il s'ensuit que df se restreint à un isomorphisme de N_x (le complément orthogonal de M_x dans T_x) sur E . L'image inverse par df dans N_x du repère fixe choisi dans E fournit un champ de n -repères normaux à M dans X .

Pour voir que M et $df|_M$ caractérise la classe d'homotopie de f , on reconstruit une application $f : X \longrightarrow S^n$ à partir de la donnée de $M \subset X$ et φ^n .

La construction de Pontryagin-Thom.

Soit M^k une sous-variété de X^{n+k} avec champ de n -repères normaux φ^n .

Le champ φ^n fournit un difféomorphisme

$$h : U \longrightarrow M \times D^n$$

d'un voisinage tubulaire (fermé) U de M sur $M \times D^n$. Soit $r : D^n \longrightarrow S^n$ une application telle que $r|_{\text{int } D^n}$ soit un homéomorphisme sur $S^n - a^*$ et $r(S^{n-1}) = a^*$, et soit $\pi : M \times D^n \longrightarrow D^n$ la projection sur le deuxième facteur.

On définira

$$f : X \longrightarrow S^n$$

par le formules

$$\begin{aligned} f|_U &= r\pi h \\ f(X - U) &= a^* \end{aligned}$$

Comme $f(bU) = a^*$, l'application f est continue. (On peut la rendre différentiable par un choix convenable de $r : D^n \longrightarrow S^n$.)

L'ambiguïté dans la définition de f n'affecte pas sa classe d'homotopie. On notera $p(M, \varphi)$ toute application $X \longrightarrow S^n$ obtenue par le procédé ci-dessus, à partir de $M \subset X$ avec champ φ .

Définition. Deux sous-varietés fermées (M, φ_0) et (M_1, φ_1) avec champ de n -repères normaux dans X seront dites φ -cobordantes si, plongées respectivement dans $X \times 0$ et $X \times 1$, elles cobordent dans $X \times I$ une variété V^{k+1} qui rencontre $X \times 0$ orthogonalement et qui est munie d'un champ φ^n de n -repères normaux dont la restriction à M_i est φ_i ($i = 0, 1$).

La variété X étant donnée, le φ -cobordisme dans X est une relation d'équivalence entre les (M^k, φ^n) .

Theorème. La construction de Pontryagin-Thom fournit une correspondance biunivoque entre les classes de φ -cobordisme de k -variétés dans la variété fermée X^{n+k} et les classes d'homotopie d'applications $X^{n+k} \longrightarrow S^n$.

1) Si (M_0, φ_0) et (M_1, φ_1) sont φ -cobordantes, la construction de Pontryagin-Thom appliquée à (V^{k+1}, φ^n) fournit une application $X \times I \longrightarrow S^n$. C'est l'homotopie cherchée entre $p(M_0, \varphi_0)$ et $p(M_1, \varphi_1)$.

2) Si $f : X \times I \longrightarrow S^n$ est une homotopie entre $f_0 = p(M_0, \varphi_0)$ et $f_1 = p(M_1, \varphi_1)$, on peut rendre cette homotopie différentiable (sans changer f_0, f_1). D'après le théorème de Sard (Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), 883-890), l'ensemble des valeurs régulières de f est partout dense dans S^n (X est supposée compacte). Sans restreindre la généralité, on peut donc supposer que $a = f_0(M_0) = f_1(M_1) \in S^n$ est valeur régulière de f_0 . La variété $f^{-1}(a) = V^{k+1} \subset X \times I$ munie du champ

de n -repères normaux évident, fournit le φ -cobordisme entre (M_0, φ_0) et (M_1, φ_1) .

3) Si $a \in S^n$ est valeur régulière de $f : X \longrightarrow S^n$ et si $f^{-1}(a) = M^k$ avec le champ φ^n obtenu plus haut, on a $f \simeq p(M, \varphi)$.

L'étude des classes d'homotopie d'applications $X \longrightarrow S^n$, où X est variété différentiable de dimension $n+k$ se ramène donc à l'étude du φ -cobordisme de k -sous-variétés de X muni de champs de n -repères normaux. Dans la suite $X = S^{n+k}$, et $k = 1$ et 2 .

Le cas $k = 1$ et $n \geq 3$.

=====

Dans le cas d'une application $f : S^{n+1} \longrightarrow S^n$, l'image inverse d'une valeur régulière est une variété fermée M^1 de dimension 1, donc une réunion dsjointe de cercles plongés dans S^{n+1} .

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, M^1 est munie d'un champ φ^n de n -repères normaux.

On peut regarder M^1 comme plongée dans R^{n+1} , et φ^n définit une application

$$\omega : M^1 \longrightarrow V_{n+1, n} = SO_{n+1}.$$

On désignera également par $\omega \in Z_2$ le reste mod 2 qui correspond à la classe d'homotopie de l'application $\omega : M^1 \longrightarrow SO_{n+1}$.

Soit ν le nombre de composantes connexes de M^1 . On pose $h(f) = \omega + \nu \in Z_2$.

Lemme. Le nombre $h(f)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f .

En effect si (M_0^1, φ_0) et (M_1^1, φ_1) sont φ -cobordantes il existe une surface V^2 à bord, plongée dans $R^{n+1} \times I$ avec champ

φ^n de n -repères normaux, et qui rencontre $\mathbb{R}^{n+1} \times (i)$ orthogonalement en M_i ($i = 0, 1$). De plus $\varphi^n|_{M_i} = \varphi_i^n$.

Si l'on adjoint à φ_i la normale à M_i dans V (intérieure pour $i = 0$, extérieure pour $i = 1$) on obtient des champs φ'_i qui fournissent des applications

$$\omega'_i : M_i \longrightarrow V_{n+2, n+i} = SO_{n+2}.$$

Les restes modulo 2 représentant ω'_i sont ω_0 et ω_1 . D'autre part, comme φ_i^n est étendu sur V par hypothèse, on a

$$\omega_0 + \omega_1 = E(V)$$

où $E(V)$ est la caractéristique d'Euler de V . Comme V est une surface orientable avec $\nu_0 + \nu_1$ trous, on a

$$E(V) = \nu_0 + \nu_1 \pmod{2}.$$

Donc

$$\omega_0 + \nu_0 = \omega_1 + \nu_1 \pmod{2}.$$

c. q. f. d.

On voit facilement que l'application

$$h : \pi_{n+1}(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

que l'on vient de définir est un homomorphisme.

h est surjectif.

Soit $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ le plongement standard du cercle, muni de son champ φ_e^n de n -repères normaux (φ_e^n est formé de la normale à S^1 dans \mathbb{R}^2 suivie d'une base du complémentaire orthogonal de \mathbb{R}^2

dans \mathbb{R}^{n+1}). En tordant φ_0^n par une application $\alpha : S^1 \rightarrow SO_n$ qui représente le générateur de $\pi_1(SO_n)$, on obtient un nouveau champ φ^n :

$$\varphi^n(z) = \alpha^*(z) \cdot \varphi_0^n(z).$$

Comme l'application $S^1 \rightarrow SO_{n+1}$ donnée par φ_0^n est l'élément non-nul de $\pi_1(SO_{n+1}) = \mathbb{Z}_2$, on a

$$h(S^1, \varphi^n) = \omega + \nu = 0 + 1 = 1.$$

h est injectif.

Soit $M^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une réunion disjointe de cercles plongé avec champ φ^n de n-repères normaux, et supposons que $h(M^1, \varphi^n) = 0$. Soient M_1, \dots, M_ν les composantes de M^1 . On peut plonger une sphère à ν trous V^2 dans \mathbb{R}^{n+2} dont le bord sera $M^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, qui rencontre \mathbb{R}^{n+1} orthogonalement, et située d'un seul côté, de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R}^{n+2} .

Démontrer que (M^1, φ^n) fournit une application homotope à une application constante par la construction de Pontryagin-Thom c'est démontrer que φ^n peut-être étendu sur V^2 (comme champ de n-repères normaux). On complète V^2 en une sphère S^2 plongée dans \mathbb{R}^{n+2} en collant les 2-disques plongés D_i dont le bord est M_i , situés de l'autre côté de \mathbb{R}^{n+1} que V et rencontrant \mathbb{R}^{n+1} orthogonalement. S^2 a dans \mathbb{R}^{n+2} un fibré normal trivial. Donc la seule obstruction (en dimension 2) pour étendre φ^n sur V^2 est égale à la somme (sur i) des obstructions γ_i pour étendre $\varphi_i = \varphi|_{M_i}$ comme champ de n-repères normaux sur D_i .

Un calcul immédiat montre que $\gamma_i = \omega_i + 1$ où ω_i représente $\omega|_{M_i}$. L'hypothèse $h(M, \varphi) = 0$ entraîne $\sum \gamma_i = 0$, d'où la conclusion.

Le cas $k = 2$.

=====

Soit M^2 une surface fermée orientable (non nécessairement connexe), plongée dans R^{n+2} avec un champ φ^n de repères normaux.

On va associer à (M^2, φ^n) une forme quadratique

$$Q : H_1(M^2; Z_2) \rightarrow Z_2.$$

Soit $X \in H_1(M^2; Z_2)$ et C une courbe (pas nécessairement connexe) représentant x .

C est une immersion régulière de ν cercles disjoints S_1, \dots, S_ν dans M^2 . Si, pour tout $x \in S_i$, $i = 1, \dots, \nu$, on adjoint à $\varphi^n(Cx)$ la normale à CS_i en x , on obtient une application

$$\omega : S_1 + \dots + S_\nu \rightarrow V_{n+2, n+1} = SO_{n+2}$$

qui détermine un élément de $H_1(SO_{n+2}) \simeq Z_2$.

On notera également ω le reste mod 2 représentant cet élément.

On définit

$$Q(C) = \omega + \sigma + \nu,$$

où σ est le nombre de points de self-intersection de C .

Si C_1 et C_2 sont deux courbes sur M^2 , on a immédiatement

$$(*) \quad Q(C_1 + C_2) = Q(C_1) + Q(C_2) + C_1 \cdot C_2,$$

où $C_1 + C_2$ a l'interprétation évidente, et $C_1 \cdot C_2$ est l'intersection des classes d'homotopie mod 2 représentées par C_1 et C_2 .

Lemme : Si $C_1 \sim C_2 \pmod{2}$, alors

$$Q(C_1) = Q(C_2) .$$

Autrement dit, Q est bien une fonction sur $H_1(M^2; Z_2)$, à valeurs dans Z_2 , satisfaisant

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + x \cdot y ,$$

où $x \cdot y$ est l'intersection des classes x et y .

Démonstration : On remarque tout d'abord qu'il est suffisant de démontrer le lemme sous l'hypothèse $C_1 \sim C_2$ (en tant que cycles à coefficients entiers).

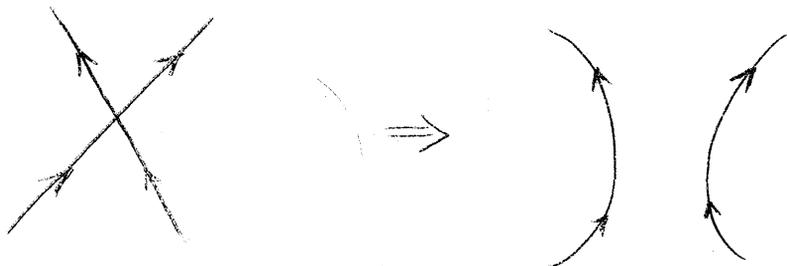
En effet, si $C_1 \sim C_2 \pmod{2}$, il existe une courbe C telle que $C_2 \sim C_1 + 2C$. L'équation (*) ci-dessus implique

$$Q(C_1 + 2C) = Q(C_1) \pmod{2} ,$$

et par suite, $Q(C_2) = Q(C_1 + 2C)$ entraînera la conclusion.

Si $C_1 \sim C_2$, on a $C_1 \cdot C_2 = 0$. En vertu de la formule (*), il est donc suffisant de démontrer que $C \sim 0$ implique $Q(C) = 0$.

Si $C \sim 0$, on peut, par un nombre fini d'opérations de la forme



remplacer C par $C' \sim C$ telle que C' n'a plus de point double. On remarque que le passage de C à C' ne change pas ω et change σ et ν d'une unité. L'expression $\omega + \sigma + \nu$ reste donc inchangée. Finalement, il suffit de démontrer que si C est un système de courbes simples sur la surface M^2 , et si $C \sim 0$, alors $Q(C) = \omega + \nu = 0$. Or, dans ce cas, C borde une surface à bord V^2 (région de M^2) et V^2 est munie d'un champ de repères normaux φ^n dans R^{n+1} . D'autre part $Q(C)$ est précisément la valeur de $h(C, \varphi^{n+1})$ du cas $k = 1$. En vertu des résultats pour $k = 1$ on a $Q(C) = 0$.

L'invariant d'Arf d'une forme quadratique.

Soit H un espace vectoriel sur Z_2 et $Q : H \rightarrow Z_2$ une forme quadratique (relative à une forme alternée bilinéaire non-dégénérée $H \otimes H \rightarrow Z_2$ notée $x.y$). L'application Q satisfait donc à

$$Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + x.y$$

On sait que l'existence de la forme alternée bilinéaire non-dégénérée implique la parité de $\dim H$.

Définition. On appelle base symplectique de H une base vectorielle $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ telle que $u_i \cdot u_j = v_i \cdot v_j = 0$ et $u_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ pour tout $i, j = 1, \dots, m$.

On convient que la base vide est symplectique.

Lemme. H admet toujours une base symplectique.

(La démonstration est élémentaire).

Définition. Soit $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ une base symplectique.

L'expression

$$C(Q) = \sum_{i=1}^m Q(u_i) Q(v_i)$$

est appelée invariant d'Arf de Q .

Lemme. $C(Q)$ ne dépend que de Q (et en particulier ne dépend pas de la base symplectique choisie pour le calculer).

(La démonstration est dans Bourbaki).

Définition. Soit (M^2, φ^n) dans R^{n+2} et $Q : H_1(M^2; Z_2) \longrightarrow Z_2$ la forme quadratique associée. La signature de (M^2, φ^n) est par définition l'invariant de Q .

Lemme. La signature de (M^2, φ^n) est un invariant de la classe de φ - cobordisme.

Il est suffisant de démontrer que si (M^2, φ^n) est le bord de $V^3 \subset R^{n+3}$ avec champ φ^n , alors la signature de (M^2, φ^n) est nulle. ($M^2 \subset R^{n+2}$, la variété V^3 située d'un côté de R^{n+2} dans R^{n+3} et rencontrant R^{n+1} orthogonalement suivant M^2).

On prend sur V^3 une fonction α dont M^2 est surface de niveau, et dont les points critiques sont non-dégénérés. Si $a \in R$ est valeur régulière de α , l'image inverse $\alpha^{-1}(a)$ est une surface M_a plongée dans V^3 . On adjoint à $\varphi^n|_{M_a}$ la normale à M_a dans V^3 (correspondant par exemple à la direction positive sur R). Pour chaque variété M_a , la signature est définie. Il est évident que M_a et M_b ont même signature si l'intervalle (a, b) ne contient que des valeurs régulières de la fonction α . Pour démontrer que (M^2, φ^n) a une signature nulle, il suffit de voir que la signature de M_a ne change pas quand on traverse une valeur critique (non régulière) de α . On peut supposer qu'il n'y a qu'un point critique de α pour chaque valeur critique.

Cas. 1. Si c est valeur critique correspondant à un point critique d'index 0 ou 3, $M_{c-\varepsilon}$ et $M_{c+\varepsilon}$ diffèrent par une sphère disjoin-

te. Leurs signatures sont donc égales.

Cas 2. Si c est valeur critique pour un point critique d'index 1 ou 2, l'une des variétés $M_{c-\xi}$ ou $M_{c+\xi}$ est obtenue à partir de l'autre en collant un tube. Si le tube est collé à deux composantes distinctes, les signatures des deux variétés sont encore trivialement égales.

Si le tube est collé à une seule composante, il faut ajouter deux éléments u, v à la base symplectique, u est représenté par un parallèle du tube qui se ferme en une courbe sur la variété. v est représenté par un méridien du tube, On ignore $Q(u)$, mais $Q(v)$ est nécessairement nul car le représentant de v est isotope à une courbe homologue à zero de la variété originale.

Dans tous les cas la signature de la variété reste inchangée à la traversée d'une valeur critique.

On obtient donc une application

$$\pi_{n+2}(S^n) \rightarrow Z_2$$

qui est évidemment un homomorphisme.

Surjectivité. On construit une surface $M^2 \subset R^{n+2}$ avec champ φ^n de repères normaux dont la signature est $1 \in Z_2$ de la façon suivante: On prend $M^2 = S^1 \times S^1 \subset R^3 \subset R^{n+2}$ et l'on munit M^2 du n -champ normal canonique φ_0^n (φ_0^n consiste en la normale à $S^1 \times S^1$ dans R^3 suivi d'une base de R^{n+2}/R^3). Soit $\lambda: S^1 \rightarrow SO_n$ un représentant du générateur de $\pi_1(SO_n)$. On définit $\beta: S^1 \times S^1 \rightarrow SO_n$ par $\beta(x, y) = \lambda(x); \lambda(y)$ où le point désigne la multiplication dans SO_n . Le champ φ^n est obtenu à partir de φ_0^n en 'tordant' par l'application β :

$$\varphi^n(z) = \beta(z) \cdot \varphi_0^n(z).$$

Les cycles $\zeta = S^1 \times (*)$ et $\eta = (*) \times S^1$ forment une base symplectique de $H_1(M^2; Z_2)$ et $Q(\zeta) = Q(\eta) = 1$. Donc

$$C(M^2, \varphi^n) = 1.$$

Pour l'injectivité, Pontryagin fait appel à un argument simple de théorie de l'homotopie d'après lequel $\pi_{n+2}(S^n)$ ne peut avoir plus de 2 éléments:

Comme la suspension $\pi_4(S^2) \rightarrow \pi_{n+2}(S^n)$ est surjective, $\pi_{n+2}(S^n)$ n'a pas plus d'élément que $\pi_4(S^2)$. D'autre part

$$\pi_4(S^2) \simeq \pi_4(S^3) \simeq Z_2.$$