CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

1° CICLO
URBINO, 2-12 LUGLIO 1962

ESCLUSIVITÀ PER LA VENDITA
EDIZIONI CREMONESE
ROMA

Lire 2.000.—

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE - C. I. M. E., 1962 - 1° CICLO

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

1° Ciclo - Urbino, 2-12 luglio 1962

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

J. CERF	: Invariants des paires d'espaces. Applications à la topologie differentielle.
A. HAEFLIGER	: Variétés feuilletées.
M. KERVAIRE	: La methode de Pontryagin pour la classification des applications sur une sphere.
S. SMALE	: Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.) (Urbino, 1962)

J. CERF

INVARIANTS DES PAIRES D'ESPACES.

APPLICATIONS A' LA TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE.

Roma - Istituto Matematico dell'Università

INVARIANTS DES PAIRES D'ESPACES.

APPLICATIONS A LA TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE.

J. Cerf (Nancy)

Introduction. Soit V une variété compacte de classe C^{∞}; le groupe de tous les difféomorphismes de V est muni naturellement de deux topologies: la topologie C^{∞}, ou topologie de la convergence uniforme des dérivées de tout ordre $\geqslant 0$ (muni de cette topologie, on note ce groupe G); et la topologie C^0, ou topologie de la convergence uniforme (muni de cette topologie, qui est moins fine que la précédente, on note ce groupe G'). Lorsque G a un bord, le groupe qu'on considère est celui des difféomorphismes qui sont tangents d'ordre infini à l'application identique le long du bord.

Prenons l'exemple $V = D^n$ (disque fermé de dimension n). La classique rétraction d'Alexander montre que G' est contractile; donc $\pi_i(G') = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Par contre, on sait depuis Milnor qu'en général $\pi_0(G)$ n'est pas nul; toutefois la rétraction d'Alexander montre que tout i-lacet de G est homotope à un i-lacet arbitrairement petit au sens de G'; dans ce cas les groupes λ_i ("groupes d'homotopie locaux"), qu'on définira, sont canoniquement isomorphes aux groupes $\pi_i(G)$. Ceci est dû évidemment au fait que D^n est contractile; en général, on obtient une suite exacte reliant les groupes λ_i, les groupes $\pi_i(G)$, et certains groupes μ_i qu'on définit: dans certains cas, ces groupes μ_i s'identifient aux groupes $\pi_i(G')$.

Dans une première partie (n.^{s} 1, 2 et 3), on fait une étude, d'un caractère général, des groupes λ_i et μ_i; on établit notamment le théorème d'isomorphisme entre les groupes μ_i et les groupes d'homotopie faibles pour les espaces "presque localement connexes en toute dimension".

Dans une second partie (n. 4), on applique ces résultats à certains espaces de difféomorphismes; on cherche d'une part à obtenir des renseignements sur leurs groupes μ_i, et d'autre part à montrer que ces espaces sont "presque localement connexes", de sorte que, d'après la première partie, leurs groupes μ_i s'identifient à leurs groupes d'homotopie faibles.

1. Définition et premières propriétés de groupes λ_i et μ_i.

On appellera espace bitopologique (E', E) un espace muni de deux topologies telles que celle de E (dite "topologie forte") soit plus fine que celle de E' (dite "topologie faible").

On appellera paire topologique un couple (A, B) d'espaces topologiques, tel que B s'identifie à une partie de A, munie d'une topologie plus fine que celle induite ~~par~~ A. A la paire (A, B) est canoniquement associé un espace bitopologique, qu'on note (B', B). (B' s'identifie à B comme ensemble et sa topologie est celle induite par A).

Soit (E', E) un espace bitopologique; un chemin presque continu dans (E', E) est une application $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$, faiblement continue sur $[0, 1]$, fortement continue sur $]0, 1]$. On note $\tilde{\Sigma}^1(E', E)$ (ou, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, $\tilde{\Sigma}(E)$, ou même $\tilde{\Sigma}$) l'espace des chemins presque continus dans (E', E), muni de la topologie suivante: la topologie borne supérieure de la topologie de la convergence uniforme des applications $[0, 1] \longrightarrow E'$, et de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des applications $]0, 1] \longrightarrow E$.

Soient x et y deux points de E; on utilisera les sous-espaces suivants de $\tilde{\Sigma}$:

$\tilde{\Sigma}_x$ (chemins d'origine x)

$\tilde{\tilde{\Sigma}}_{xy}$ (chemins d'origine x et d'extrémité y)
$\tilde{\tilde{\Sigma}}_{xx}$ sera noté $\tilde{\Omega}_x$ (espace des lacets presque continus d'origine x)

On convient de noter encore x le chemin constant en x.

Définitions.[1) On pose:

1) Pour tout $i \geqslant 0$: $\pi_i(\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(E', E); x) = \lambda_i(E', E; x)$ (i-ème groupe d'homotopie local de (E', E) au point x).

2) Pour tout $i \geqslant 1$: $\pi_{i-1}(\tilde{\Omega}_x(E', E); x) = \mu_i(E', E; x)$ (i-ème groupe d'homotopie mixte de (E', E) au point x).

Propriétées ((E', E) désigne un espace bitopologique et x un point de E)

1) Caractère local des λ_i. Soit (V', V) un voisinage faible de x; par homothétie, tout compact K de $\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(E', E)$ se rétracte dans $\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(V', V)$, de façon que $K \cap \tilde{\tilde{\Sigma}}_x(V', V)$ reste dans $\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(V', V)$; donc l'application canonique: $\pi_i(\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(V', V); x) \to \pi_i(\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(E', E); x)$ est un isomorphisme; d'où l'isomorphisme:

$$\lambda_i(V', V; x) \xrightarrow{\simeq} \lambda_i(E', E; x).$$

Donc plus généralement: soit (U', U) un autre voisinage faible de x; $\lambda_i(V', V; x)$ et $\lambda_i(U', U; x)$ sont canoniquement isomorphes.

2) Soit F une partie ouverte et fermée de E (autrement dit, fortement ouverte et fermée), et soit $x \in F$. Alors, pour tout $i \geqslant 1$, $\lambda_i(F', F; x)$ (resp. $\mu_i(F', F; x)$) s'identifie canoniquement à $\lambda_i(E', E; x)$

---

1) Je dois à M. B. Morin de m'avoir signalé que les définitions données en [2] pouvaient être mises sous cette forme très maniable.

(resp. $\mu_i(E', E);x)$).

(En effet, pour $i \geqslant 1$, un "i-lacet local" et un "i-lacet mixte" ont des images fortement connexes).

3) La suite exacte et la suite exacte complétée.

Le lemme suivant se démontre exactement comme un lemme (bien connu) de Serre:

Lemme. L'application canonique $\tilde{\Sigma}_x(E', E; x) \longrightarrow E$ (qui à tout chemin presque contenu d'origine x associe son extrémité) est une fibration de Serre, de fibre $\breve{\Omega}_x(E', E; x)$. (On notera que cette fibration n'est pas surjective en général.)

La suite exacte d'homotopie de ce fibré donne immédiatement la suite exacte:

$$(1) \quad \ldots \longrightarrow \lambda_i(E',E;x) \longrightarrow \pi_i(E;x) \longrightarrow \mu_i(E',E;x) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \lambda_{i-1}(E',E;x) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mu_1(E',E;x) \longrightarrow \lambda_0(E',E;x) \longrightarrow \pi_0(E;x)$$

Définition de $\mu_0(E',E;x)$. La relation "il existe un chemin presque continu d'origine y et d'extrémité y' " n'est pas en général une relation d'équivalence entre points y et y' de E; lorsque c'est une relation d'équivalence, on peut définir $\mu_0(E',E;x)$: c'est l'ensemble pointé quotient de E (pointé en x) par cette relation d'équivalence. Alors la suite exacte (1) se prolonge naturellement comme suit:

$$(1') \quad \ldots\ldots \longrightarrow \mu_1(E',E;x) \longrightarrow \lambda_0(E',E;x) \longrightarrow \pi_0(E;x) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mu_0(E',E;x) \longrightarrow 0$$

Exemple. La condition ci-dessus est remplie dans le cas d'un groupe bitopologique (G',G). En effet, si γ est un chemin presque continu d'origine y et d'extrémité y', alors $y'.\,\gamma^{-1}.\,y$ est un chemin presque continu d'origine y' et d'extrémité y. Et si γ' est un chemin presque continu d'origine y' et d'extrémité y'', alors $\gamma' . y'^{-1} . \gamma$ est un chemin presque continu d'origine y et d'extrémité y''.

Un autre exemple sera donné plus loin (2^0 du théorème 3).

4) Chemins presque continus dans les espaces de lacets mixtes.

Outre la topologie dont on a muni $\tilde{\Omega}_x$, considérons sur le même espace la topologie faible $\tilde{\Omega}'_x$ (celle de la convergence uniforme des applications $[0, 1] \longrightarrow E'$, qui, par définition de $\tilde{\Omega}_x$, est moins fine que $\tilde{\Omega}_x$).

Soit $\alpha \in \tilde{\Omega}_x$; supposons qu'il existe un chemin presque continu dans $(\tilde{\Omega}'_x, \tilde{\Omega}_x)$, d'origine x, d'extrémité α ; autrement dit, qu'il existe une application $\gamma : I^2 \longrightarrow E$, faiblement continue, fortement continue pour $t > 0$, telle que:

$$\begin{cases} \gamma\left((I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I) \right) = \{x\} \\ \gamma(t, 1) = \alpha(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in I \end{cases}$$

Soit φ l'application $I^2 \longrightarrow I^2$ défini par:

$$\varphi(t,u) = \begin{cases} (1 - 2u(1-t), t) & \text{pour} \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ (t, 2t(1-u) + 2u - 1) & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Alors $\gamma \circ \varphi$ définit un chemin <u>continu</u> dans $\tilde{\Omega}_x$, d'origine x, d'extrémité α . Comme, pour $i > 1$, un i-lacet mixte s'identifie à un 1-lacet dans un espace de (i-1)-lacets, on peut énoncer:

Soit $i \geqslant 1$; soit α un i-lacet mixte d'origine x dans (E', E). Pour que α soit homotope à 0, il suffit qu'il existe un chemin presque continu d'origine x, d'extrémité α . Soit en plus γ un tel chemin;

il existe une homotopie de α à x ayant même image dans E que γ.

<u>Application: groupes μ_i des espaces presque contractiles.</u>

<u>Définition.</u> Soit (E', E) un espace bitopologique; soit $x \in E$. On dit que (E', E) est <u>presque contractile sur x</u> s'il existe une application $h : E \times I \longrightarrow E$, faiblement continue (i. e., continue de $E' \times I$ dans E'), fortement continue sur $E \times \rbrack 0, 1 \rbrack$, et telle que:

$$h(y, 0) = y \quad \text{et} \quad h(y, 1) = x \qquad \text{pour tout} \quad y \in E.$$

Il est immédiat, compte tenu de ce qui précède, <u>que si (E', E) est presque contractile sur x, alors $\mu_i(E', E; x) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ (et même pout tout $i \geqslant 0$, si μ_0 existe).</u>

Exemples.

1. L'espace $\tilde{\Sigma}_x(E', E)$ est presque contractile sur le chemin constant x.

2. Le groupe (G', G) relatif à la boule (cf. Introduction) est presque contractile sur son élément neutre (donc sur chacun de ses points).

3. Soit ρ la demi-boule fermée nord de D^n; soit (P', P) l'espace bitopologique des plongements C^∞ de ρ dans D^n qui sont C^∞- tangents à l'identité en tout point de $\rho \cap S^{n-1}$; (P', P) est presque contractile sur chacun de ses points; dont tous ses μ_i sont nuls; mais tous les $\pi_i(P)$ sont nuls aussi (cf. [1], II, 4. 2. 2); donc, d'après la suite exacte (1'), ses groupes d'homotopie locaux sont tous nuls.

4. Si la topologie de E' est grossière, alors (E', E) est presque contractile sur chacun des ses points. Les composantes connexes fortes des espaces de jets des espaces des plongements, munis de la topologie quotient de la bitopologie (C^0, C^∞), sont de ce type; (ceci est une généra-

lisation de [1] , appendice au chapitre III).

5) Lacets forts qui sont homotopes à zero en tant que lacets mixtes.

Par un procédé très analogue à celui utilisé ci-dessus (propriété 4°) on montre: Soit $i \geqslant 1$; soit α un i-lacet d'origine x dans E (autrement dit, un i-lacet fort). Si α est homotope à 0 en tant que lacet mixte de (E',E), alors α est extrémité d'un chemin presque continu d'origine x dans l'espace des i-lacets de E. Soit en plus γ une homotopie de α à 0 (en tant que lacet mixte) alors il existe un tel chemin presque continu ayant même image dans E que γ.

2. Le théorème d'isomorphisme pour les paires presque n-localement connexes.

Préliminaires: paires n-localement connexes: théorème d'isomorphisme.

Notations. Soit A un espace topologique; on notera $\Sigma^n(A)$ l'espace des n-cubes singuliers à valeurs dans A, et $\dot{\Sigma}^n(A)$ l'espace des applications continues du bord ∂I^n de I^n dans A.

Définition 1. Soit $(f,g) : (A,B) \longrightarrow (C,D)$ un morphisme de paires topologiques. Soit $x \in A$; on dit que (f,g) est faiblement ouverte en x si pour tout voisinage U de x dans A il existe un voisinage V de $f(x)$ dans C tel que $g(U \cap B) \supset V \cap D$.

Définition 2. Soit $f : A \longrightarrow C$ une application continue. On appelle relevée de f et on note $\varsigma^1(f)$ (ou simplement $\varsigma(f)$) l'application (canoniquement definie par f):

$\Sigma^1(A) \longrightarrow \Sigma^1_f(C)$, où $\Sigma^1_f(C)$ est le sous-espace de $\Sigma^1(C) \times A \times A$ formé des triples (γ, x, y) tels que $\gamma_0 = f(x)$ et $\gamma_1 = f(y)$.

Pour un morphisme (f, g) de paires topologiques, le relevé $\rho^1(f, g)$ est par définition $(\rho^1(f), \rho^1(g))$.

On note $\rho^2(f)$ le relevé de $\rho^1(f)$, etc.

Définition 3. Soit $(f, g) : (A, B) \to (C, D)$ un morphisme de paires topologiques. Soit $x \in A$; si le n-ème relevé $\rho^n(f, g)$ est faiblement ouvert en x, on dit que (f, g) est n-localement connexe (n-l. c.) en x.

Exemples. Soit (f, g) le morphisme $(A, B) \to (0, 0)$, où 0 est un espace ayant un seul point (évidemment, (f, g) est bien déterminé par la donnée de (A, B) et de 0). Soit $x \in A$; dire que (f, g) est faiblement ouverte en x, c'est dire que B est dense dans A en x, autrement dit que $x \in \overline{B}$.

Le relevé $\rho^1(f, g)$ est le morphisme $(\Sigma^1(A), \Sigma^1(B)) \to$ $\to (\dot{\Sigma}^1(A), \dot{\Sigma}^1(B))$ canoniquement défini par f; et plus généralement $\rho^n(f, g)$ est le morphisme $(\Sigma^n(A), \Sigma^n(B)) \to (\dot{\Sigma}^n(A), \dot{\Sigma}^n(B))$ canoniquement défini par f. La n-locale connexion de (f, g) en x équivaut donc bien à la n-locale connexion de (A, B) en x, au sens où elle a été définie en [1], p. 344.

Lemme. Soit $(f, g) : (A, B) \to (C, D)$ un morphisme de paires métrisables. Si (f, g) et $\rho^1(f, g)$ sont ouvertes en tout point de A, alors $\rho^1(f, g)$ est ouverte en tout point de $\Sigma^1(A)$.

Ce lemme généralise à la fois le 1) et le 2) du lemme 2 de [1], p. 345; sa démonstration est très analogue à celle du 1) de ce lemme.

Application. Soit comme plus haut le morphisme $(f, g) : (A, B) \to (0, 0)$ défini par (A, B). Si B est dense dans A, et si (A, B) est n-l. c. pour tout $n \geq 0$, cela signifie que $\rho^n(f, g)$ est faiblement ouverte sur

A pour tout $n \geq 0$. On en déduit, par une suite d'applications du lemme ci-dessus, que $\rho^n(f, g)$ est faiblement ouverte sur $\Sigma^1(A)$ pour tout $n \geq 1$. Par récurrence sur l'entier n', on en déduit $\rho^n(f, g)$ est faiblement ouverte sur $\Sigma^{n'}(A)$, pour tout $n' \geq 0$ et pour tout $n \geq n'$.

En particulier, pour tout n, $\rho^n(f,g)$ et $\rho^{n+1}(f,g)$ sont faiblement ouvertes sur $\Sigma^n(A)$. On en déduit facilement (la démonstration est analogue à celle du lemme 1 de [1], p. 345) que tout élément α de $\Sigma^n(A)$ dont le bord est un élément de $\dot{\Sigma}^n(B)$ est origine d'un chemin continu, au cours duquel le bord de α reste fixe, et qui aboutit à un élément de $\Sigma^n(B)$. On a donc le résultat suivant (plus fort que celui de la proposition 1 de [1], p. 345, en ce que l'hypothèse 3 de cette dernière est superflue):

Théorème 1. Soit (A, B) une paire métrisable; si B est dense dans A, et si (A, B) est n-l. c. pour tout $n \geq 0$, alors, pour tout $x \in B$, l'application canonique.

$$\pi_n(B;x) \longrightarrow \pi_n(A;x)$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$.

Paires presque n-localement connexes. Théorème d'isomorphisme.

Définition. Soit (A, B) une paire topologique, et soit $x \in A$. On dit que (A, B) est *presque localement connexe par arcs* (p. l. c. a.) en x, ou encore *presque 0-localement connexe* en x, si pour tout voisinage U de x dans A, il existe un voisinage V de x dans A tel que pour tout couple (y, z) de points de $(V \cap B)$ il existe dans $U \cap B$ un chemin presque continu d'origine y et d'extrémité z.

Pour $n \geq 1$, on dit que (A, B) est *presque n-localement conne-*

xe (p. n-l. c.) en x si pour tout voisinage U de x dans A, il existe un voisinage V de x dans A tel que tout n-lacet mixte de $V \cap B$ soit homotope à 0 (avec origine fixe) dans $U \cap B$.

Remarques. 1) Sauf pour le cas $n = 0$, le n-locale connexion n'entraine pas la presque n-locale connexion.

2) Pour $n \geqslant 1$, si (A, B) est p. n-l. c. en x, alors $\tilde{\Omega}_x$ est $(n-1)$-l. c. en x. La réciproque n'est pas exacte en toute généralité; mais elle est vraie en particulier lorsque (A, B) est un espace bitopologique homogène.

3) Si un espace bitopologique (E', E) est presque contractile sur un de ses points x, alors il est p. n-l. c. en x pour tout $n \geqslant 0$. (C'est une conséquence de la propriété 4° du n° 1).

Lemme. Soit (A, B) une paire métrisable.

1) Soit $\tilde{\zeta}^1(f, g)$ l'application canonique:

$$(\Sigma^1(A), \tilde{\Sigma}^1(B)) \rightarrow (\dot{\Sigma}^1(A), \dot{\Sigma}^1(B))$$

Si B est dense et p. l. c. a. dans A, alors $\tilde{\zeta}^1(f, g)$ est faiblement ouverte.

2) Si (A, B) est p. n-l. c. et p. $(n+1)$-l. c., alors $\tilde{\zeta}^1(f, g)$ est n-l. c.

Corollaire. 1) Sous les hypothèses du 1), $\tilde{\tilde{\Sigma}}^1(B)$ est dense dans $\Sigma^1(A)$; pour tout $x \in B$, $\tilde{\tilde{\Sigma}}^1_x(B)$ est dense dans $\Sigma_x(A)$, et $\tilde{\Omega}_x(B)$ est dense dans $\Omega_x(A)$.

2) Sous les hypothèses du 2), $\tilde{\tilde{\Sigma}}^1(B)$ est n-l. c. dans $\Sigma^1(A)$; pour tout $x \in B$, $\tilde{\tilde{\Sigma}}^1_x(B)$ est n-l. c. dans $\Sigma_x(A)$, et $\tilde{\Omega}_x(B)$ est n-l. c. dans $\Omega_x(A)$.

Principe de la démonstration du lemme. 1°) Soit à approcher un élément α de $\Sigma^1(A)$ par un chemin presque continu β d'origine x (proche de α_0 au sens faible) et d'extrémité y (proche de α_1 au sens faible). On construit une suite finie $x = x, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p = y$, telle que deux x_i consécutifs soient proches l'un de l'autre, et que, pour tout i, x_i soit proche de $\alpha_{i/p}$ (tout ceci au sens faible). On joint x_1 à x par un petit chemin presque continu; sur ce chemin on choisit ensuite x'_1, arbitrairement voisin de x_1; puis on joint x_2 à x'_1 par un petit chemin presque continu, et ainsi de suite.

2°) La démonstration est analogue à celle du 1°); elle utilise la propriété 5° du n° 1.

Application. Soit (A, B) une paire métrisable; si B est dense dans A, et si pour tout $n \geqslant 0$, (A, B) est p. n-l. c., alors, d'après le corollaire ci-dessus, pour tout $x \in B$, $\tilde{\Omega}_x(B)$ est dense et n-l. c. dans $\Omega_x(A)$ pour tout $n \geqslant 0$. Donc d'après le théorème 1, $\pi_n(\tilde{\Omega}_x(B);x)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_n(\Omega_x(A);x)$ pour tout $n \geqslant 0$. D'autre part la relation (entre couple de points de B) "être joints par un chemin presque continu" s'identifie d'après le 1°) du corollaire à la relation "être joints par un chemin faiblement continu". Donc:

Théorème 2. Soit (A, B) une paire métrisable. Si B est dense dans A, et si, pour tout $n \geqslant 0$, (A, B) est presque n-localement connexe en tout point de A, alors l'homomorphisme canonique:

$$\mu_n(B', B; x) \longrightarrow \pi_n(A; x)$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$, et pour tout $x \in B$.

Corollaire. Sous les hypothèses du théorème, l'homomorphisme canonique $\pi_n(B'; x) \longrightarrow \pi_n(A, x)$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

3. Propriétés relatives aux fibrations.

On s'intéresse aux types suivants de fibrés bitopologiques :

a) les espaces homogènes bitopologiques: $(B', B) = (G', G)/(H', H)$, où H' est un sous-groupe fermé de G' (et par conséquent, H un sous-groupe fermé de G).

b) les paires d'espaces homogènes bitopologiques d'un même groupe: H' et K' sont deux sous-groupes fermés de G' tels que $K' \subset H' \subset G'$, et on considère la fibration de $(G', G)/(K', K)$ sur $(G', G)/(H', H)$ de fibre $(H', H)/(K', K)$.

Pour les propriétés dont on aura besoin, le cas b) se ramène sans difficulté au cas a), auquel on se bornera dans la suite.

Les fibrés qu'on considére sont "fortement de Serre"; le plus souvent, il s'agit meme de fibrés "fortement localement triviaux". (Cette dernière condition est remplie dans le cas des espaces de plongements, cf. [1], p. 294, corollaire 2).

Si (B', B) est un espace homogène bitopologique, fortement localement trivial, alors $\Sigma^n(G)$ est fibré localement trivial sur $\Sigma^n(B)$, qui s'identifie à l'espace homogène $\Sigma^n(G)/\Sigma^n(H)$. Par contre, si on note $\Sigma'^n(G)$ l'espace $\Sigma^n(G)$ muni de la topologie faible, c'est-à-dire celle induite par $\Sigma^n(G')$, alors $\Sigma'^n(B)$ ne s'identifie pas on général au quotient $\Sigma'^n(G)/\Sigma'^n(H)$; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit évidemment que l'application canonique $\Sigma'^n(G) \to \Sigma'^n(B)$ soit ouverte; on dit alors que la fibration "relève les petits cubes" (cf. [1], p. 353). Une autre propriété qui nous intéresse ici est le "relèvement des chemins presque continus". Or le critère donné en [1], p. 355, prop. 2, pour le relèvement des petits cubes, est aussi valable pour le relèvement des chemins presque continus (il suffit de compléter très légèrement la démonstration). De façon précise, on a le:

Lemme. Soit $(B', B) = (G', G)/(H', H)$ un espace homogène bitopologique, métrisable, et tel que (H', H) soit presque localement connexe par arcs. Alors:

1) Si cette fibration est fortement de Serre, elle relève les chemins presque continus.

2) Si elle est fortement localement triviale, elle relève les petits n-cubes pour tout $n \geqslant 0$.

Corollaire. Sous les hypothèses du 2°), $(\Sigma'^n(B), \Sigma^n(B))$ s'identifie (pour tout $n \geqslant 0$) à l'espace homogène $(\Sigma'^n(G), \Sigma^n(G))/(\Sigma'^n(H), \Sigma^n(H))$; en plus, la fibration correspondante est fortement localement triviale, de fibre presque localement connexe par arcs, de sorte qu'elle relève les chemins presque continus.

De ce lemme et de son corollaire on déduit le théorème suivant:

Théorème 3. Soit $(B', B) = (G', G)/(H', H)$ un espace homogène bitopologique, métrisable, fortement localement trivial, et tel que (H', H) soit p. l. c. a. en e.

1°) Il existe une suite exacte d'homomorphismes canoniques:

$$(2) \quad \ldots \to \lambda_n(H', H; e) \to \lambda_n(G', G; e) \to \lambda_n(B', B; e) \to$$
$$\to \lambda_{n-1}(H', H; e) \to \ldots \to \lambda_0(G', G; e) \to \lambda_0(B', B; e) \to 0$$

2) $\mu_0(B', B; e)$ existe, et on a une suite exacte d'homomorphismes canoniques:

$$(3)\quad \ldots \longrightarrow \mu_n(H',H;e) \longrightarrow \mu_n(G',G;e) \longrightarrow \mu_n(B',B;e) \longrightarrow$$

$$\rightarrow \mu_{n-1}(H',H;e) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mu_0(G',G;e) \longrightarrow \mu_0(B',B;e) \longrightarrow 0$$

3) <u>Si (G',G) et (H',H) vérifient la condition "être presque n-localement connexe pour tout $n \geqslant 0$", il en est de même de (B',B). Même résultat en permutant les rôles de (G',G) et (B',B).</u>

<u>Démonstration.</u> 1) Considérons la fibration canonique:

$$(4)\qquad \tilde{\Sigma}_e(G',G) \longrightarrow \tilde{\Sigma}_e(B',B)\,, \quad \text{de fibre} \quad \tilde{\Sigma}_e(H',H).$$

Elle est surjective d'après le 1° du lemme; elle est de Serre d'après le corollaire; il suffit d'écrire sa suite exacte classique d'homotopie.

2) Notons d'abord les deux propriétés suivantes du relèvement des chemins presque continus dans un espace homogène bitopologique:

(a) Soit $\alpha \in \tilde{\Omega}_e(B',B)$; soient β et β^* deux relèvements de α ; leurs extrémités β_1 et β^*_1 sont presque homotopes dans (H',H). (Il suffit en effet de poser $\gamma_t = \beta^*_t . \beta_t^{-1} . \beta_1$)

(b) Soit $\alpha \in \tilde{\Omega}_e(B',B)$; soit β un relèvement de α ; si l'extrémité β_1 de β est presque homotope à e dans (H',H), alors il existe un relèvement β^* de α tel que $\beta^*_1 = e$. (Soit en effet γ un chemin presque continu dans (H',H), d'origine e et d'extrémité β_1; on pose $\gamma^{-1} . \beta = \beta^*$).

Ceci dit, considérons la fibration canonique:

$$(5)\qquad \tilde{\Omega}_e(G',G) \longrightarrow \tilde{\Omega}_e(B',B)\,, \quad \text{de fibre} \quad \tilde{\Omega}_e(H',H).$$

Cette fibration <u>n'est pas surjective</u> en général; soit $\tilde{\Omega}$ son image. Soit α un n-cube fort dans $\tilde{\Omega}_e(B',B)$; α s'identifie à un élément $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{\Omega}_e(\Sigma'^n(B), \Sigma^n(B))$; $\tilde{\alpha}$ se relève en un élément $\tilde{\beta}$ de

$\widetilde{\Sigma}_e(\Sigma'^n(G), \Sigma^n(G))$, qui s'identifie à un n-cube fort β dans $\widetilde{\Sigma}_e(G', G)$. Supposons maintenant que G soit à valeurs dans $\widetilde{\Omega}$; alors $\alpha(0)$ (image par α de l'origine de I^n) peut se relever en un élément de $\Omega_e(G', G)$. Donc, d'après la propriété (a) ci-dessus, $\beta(0)$ aboutit à un élément de H qui est presque homotope à e dans $(\check{H}', H)$. Il en résulte facilement que $\check{\beta}$ aboutit à un élément de $\Sigma^n(H)$ qui est presque homotope à e dans $(\Sigma'^n(H), \Sigma^n(H))$. Donc, d'après la propriété (b), il existe un relévement β^* de $\widetilde{\alpha}$ qui aboutit à e; β^* s'identifie à un n-cube fort dans $\widetilde{\Omega}_e(G', G)$, qui est un relévement de α . Ainsi la fibration (5) est de Serre; si on écrit sa suite exacte d'homotopie, on obtient la suite (3), mais seulement jusqu'à:

$$\ldots \longrightarrow \mu_1(G', G; e) \longrightarrow \mu_1(B', B; e)$$

On la complète à droite sans difficulté à l'aide du lemme, et des propriétés (a) et (b) ci-dessus.

3) Tout élément α de $\widetilde{\Omega}_e(B', B)$ qui est petit au sens faible se relève en un élément β de $\widetilde{\Sigma}_e(G', G)$ qui est petit au sens faible; l'extrémité de β peut donc être jointe à e par un petit chemin presque continu; l'argument utilisé pour démontrer la propriété (b) ci-dessus prouve alors que β peut se relever en un petit élément de $\widetilde{\Omega}_e(G', G)$. L'application (5) est donc <u>ouverte;</u> sa fibre $\Omega_e(H', H)$ est presque localement connexe; elle vérifie donc le relèvement des petits cubes. On est donc ramené à un problème analogue, relatif à la n-connexion locale au lieu de la presque n-connexion locale; on peut alors appliquer le lemme de [1] , p. 357. (Comme au 2°), on montre à part, sans difficulté, la presque n-locale connexion pour n = 0 et 1).

4. Application aux groupes de difféomorphismes et aux espaces de prolongements.

On se place dans une dimension n pour laquelle on suppose remplies les conditions suivantes:

1) Les groupes de difféomorphismes des variétés compactes de dimension n sont presque localement connexes par arcs.

2) Les fibrations de ces groupes définies par restriction aux sous-variétés de codimension 1 sont ouvertes au sens C^{∞}.

Ces conditions sont certainement remplies pour $n = 3$, et il semble actuellement raisonable de conjecturer qu'elles sont vraies pour $n \geqslant 8$.

Lemme. Si n est tel que les conditions 1°) et 2°) ci-dessus soient remplies; alors, pour tout $S^p \times D^q$ tel que $p+q = n$, le groupe bitopologique (G'_p, G_p) des difféomorphismes tangents à l'identité le long du bord $S^p \times S^{q-1}$, est presque i-localement connexe pour tout $i \geqslant 0$.

Démonstration. Soit E_{p-1} l'image canonique de G_p dans l'espace des plongements de $S^{p-1} \times D^q$ dans $S^p \times D^q$ (E_{p-1} est défini pour $1 \leq p \leq n$). Doit F_p l'image canonique de G_p dans l'espace des plongements de $S^p \times D^{q-1}$ dans $S^p \times D^q$ (F_p est défini pour $0 \leq p \leq n-1$). On a les fibrations suivantes:

$$G_p \longrightarrow E_{p-1} \quad , \text{ de fibre notée } H_p \ (1 \leq p \leq n)$$

$$G_p \longrightarrow F_p \quad , \text{ de fibre notée } K_p \ (0 \leq p \leq n-1)$$

H_p est le sous-groupe de G_p formé des difféomorphismes de $S^p \times D^q$ qui induisent l'identité sur $S^{p-1} \times D^q$; en fibrant H_p sur l'espace de ses jets le long de $S^{p-1} \times D^q$, on voit (compte tenu de la propriété des espaces de jets signalée plus haut, n° 1, propriété 4°), exemple 4) que H_p a même comportement que G_0 au point de vue de la presque locale connexion; donc H_p est p. i-l. c. pour tout i. De manière analogue, on voit que K_p a même comportement (au point de vue de la presque locale connexion) que $G_p \times G_p$.

Soit d'autre part W_p un voisinage tubulaire de $S^p \times D^{q-1}$ dans $S^{p+1} \times D^{q-1}$; W_p est difféomorphe à $S^p \times D^{q-1} \times D^1$; identifions F_p à l'espace des plongements de $S^p \times D^{q-1}$ dans W_p qui se prolongent en un difféomorphisme de W_p induisant l'identité sur le bord. Soit E_p^* (resp. F_p^*) l'espace de tous les plongements de $S^p \times D^{q-1}$ dans $S^{p+1} \times D^{q-1}$ (resp. W_p) qui sont tangents à l'application identique le long de $S^{p-1} \times D^{q-1}$. Tout élément de E_p^* qui est dans la composante connexe forte de l'application identique est dans E_p^*; donc la composante connexe forte de l'identité dans E_p coincide avec celle de E_p^*. De même pour F_p et F_p^*; (F_p est même exactement la composante connexe de l'identité dans F_p^*). Donc, en ce qui concerne la presque i-locale connexion pour $i \geqslant 1$, E_p et E_p^* d'une part, F_p et F_p^* d'autre part, ont même comportement; en plus F_p^* est faiblement ouvert dans E_p^*, donc F_p^* et E_p^* ont même comportement; donc finalement E_p et F_p ont même comportement.

En resumé, on a en appliquant le 3° du théorème 3 aux deux fibrations ci-dessus, les implications suivantes:

G_p p. i-l. c. pour tout i $\Longrightarrow$ F_p p. i-l. C. pour tout i

$\Longrightarrow$ E_p p. i-l. c. pour tout i $\Longrightarrow$ G_{p+1} p. i-l. c. pour tout i.

D'où le lemme, puisque G_c est presque i-localement connexe pour tout i.

Application au groupe des difféomorphismes de S^n, muni de la topologie C^∞.

Soit (E', E) l'espace des plongements de l'hémisphère nord fermé de S^n dans S^n qui conservent l'orientation; (E', E) est muni de la topologie (C^ω, C^∞). Ecrivons la suite exacte relative à cette espace (cf. n° 1, propriété 3°; le point de base est pris à l'application identique):

$$(1) \quad \ldots \longrightarrow \lambda_i(E', E) \longrightarrow \pi_i(E) \longrightarrow \mu_i(E', E) \longrightarrow \lambda_{i-1}(E', E) \longrightarrow$$
$$\ldots \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \mu_0(E', E) \longrightarrow 0.$$

On va donner succesivement une interprétation de chacun des termes de cette suite.

1°) Interprétation de $\pi_i(E)$.

On fibre E en associant à chaque plongement son 1-jet au pôle nord. Cette fibration est localement triviale (cf. [1], p. 318). Sa fibre est le sous-espace de E formé des plongements qui sont tangents à l'application identique au pôle nord; elle est acyclique en toute dimension (cf. [1], p. 336, prop. 8). Sa base s'identifie à l'espace des n-repères d'orientation positive de S^n; d'où un isomorphisme canonique:

$$(2) \qquad \pi_i(E) \approx \pi_i(S\,0\,(n+1)) \qquad \text{pour tout } i \geqslant 0.$$

2°) Interprétation de $\mu_i(E', E)$.

Soit (G', G) le groupe des difféomorphismes de S^n qui conservent l'orientation; soit (H', H) le groupe des difféomorphismes de D^n qui sont tangents à l'application identique le long de S^{n-1}.

On a une fibration homogène:

$$(E', E) \approx (G', G)/(H', H)$$

Or $\mu_i(H', H) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$ (puisque (H', H) est presque contractile, cf. n° 1, propriété 4°)). Donc $\mu_i(E', E) \approx \mu_i(G', G)$ pour tout $i \geqslant 0$. D'après le lemme ci-dessus, (G', G) est presque i-localement connexe pour tout $i \geqslant 0$. Donc finalement:

(3) $\qquad \mu_i(E', E) \approx \pi_i(G') \qquad$ pour tout $i \geqslant 0$.

3°) Interprétation de $\lambda_i(E', E)$.

On utilise une cascade de fibrations dont le principe est dû à Smale (cf. par exemple Thom [4]). Smale a appliqué sa mèthode au calcul des groupes d'homotopie des espaces d'immersions; pour que cette mèthode devienne applicable aux espaces de plongements, il est essentiel d'opérer en homotopie locale.

On considère la boule D^n, canoniquement plongée dans R^n, où les coordonnées sont $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; ε est un nombre strictement > 0, assez petit pour que le cube $[-\varepsilon, +\varepsilon]^n$ soit intérieur a D^n.

On appelle: $\mathcal{P}_1$ la partie de D^n définie par $x_1 \leq \varepsilon$.

$\mathcal{Q}_1$ la partie de D^n définie par $|x_1| \leq \varepsilon$.

Par récurrence, on définit comme suit $\mathcal{P}_j$ et $\mathcal{Q}_j$ pour $1 \leq j \leq n$:

$\mathcal{P}_j$ est la partie de $\mathcal{Q}_{j-1}$ définie par $x_j \leq \varepsilon$.

$\mathcal{Q}_j$ est la partie de $\mathcal{Q}_{j-1}$ définie par $|x_j| \leq \varepsilon$.

On notera que $\mathcal{Q}_n$ est le cube $[-\varepsilon, +\varepsilon]^n$.

Soit (P'_j, P_j) l'espace de tous les plongements de $\mathcal{P}_j$ dans D^n qui sont tangents à l'application identique le long de $\mathcal{P}_j \cap S^{n-1}$; une fois les angles arrondis, $\mathcal{P}_j$ est difféomorphe à une demi-boule fermée, de sorte que, d'après le n° 1, propriété 4°), exemple 3, $\lambda_i(P'_j, P_j) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$.

Soit (Q'_j, Q_j) l'image canonique de (P'_j, P_j) dans l'espace des plongements de Q_j dans D^n; on a une fibration canonique (du type b) considéré au début du n° 3):

$$(P'_j, P_j) \longrightarrow (Q'_j, Q_j) \text{ ; on note sa fibre } (F'_j, F_j).$$

La suite exacte d'homotopie locale donne:

(4) $$\lambda_i(F'_j, F_j) \approx \lambda_{i+1}(Q'_j, Q_j) \quad \text{pour tout } i \geqslant 0.$$

Or F_1 s'identifie au groupe H.

D'autre part, soit Q^*_j l'espace de tous les plongements de $\mathcal{Q}_j$ dans D^n qui induisent l'identité sur $\mathcal{Q}_j \cap S^{n-1}$; et soit Q_j^{**} le sous-espace de Q^*_j formé des plongements qui induisent l'identité sur $\mathcal{Q}_{j+1}$. En raison du caractère faiblement local des groupes λ_i, on a: $\lambda_i(F'_{j+1}, F_{j+1}) \approx \lambda_i(Q_j^{**'}, Q_j^{**})$ pour tout $i \geqslant 0$; puisque Q_j^{**} s'identifie à la fibre de la fibration canonique $Q^*_j \longrightarrow P_{j+1}$, on a: $\lambda_i(Q_j^{**'}, Q_j^{**}) \approx \lambda_i(Q_j^{*'}, Q^*_j)$ pour tout $i \geqslant 0$; enfin, comme Q^*_j est ouvert et fermé dans Q_j, il resulte de la propriété 2° du n° 1 qu'on a: $\lambda_i(Q_j^{*'}, Q^*_j) \approx \lambda_i(Q'_j, Q_j)$ pour tout $i \geqslant 1$. D'où finalement:

$$\lambda_i(F'_{j+1}, F_{j+1}) \approx \begin{cases} \lambda_i(Q'_j, Q_j) & \text{pour } i \geqslant 1 . \\ \lambda_0(Q_j^{*'}, Q^*_j) & \text{pour } i = 0 . \end{cases}$$

Donc compte tenu de (4) ci-dessus:

$$\lambda_i(Q'_j, Q_j) \approx \begin{cases} \lambda_{i-1}(Q'_{j-1}, Q_{j-1}) & \text{pour } i \geqslant 1. \\ \lambda_0(Q_{j-1}^{*'}, Q^*_{j-1}) & \text{pour } i = 0. \end{cases}$$

On a donc les isomorphismes suivants:

$$\lambda_o(Q'_n, Q_n) = 0$$

$$\lambda_1(Q'_n, Q_n) \approx \lambda_o(Q^{*\prime}_{n-1}, Q^*_{n-1})$$

$$\lambda_2(Q'_n, Q_n) \approx \lambda_1(Q'_{n-1}, Q_{n-1}) \approx \lambda_o(Q^{*\prime}_{n-2}, Q^*_{n-2})$$

. . . .

. . . .

$$\lambda_{n-1}(Q'_n, Q_n) \approx \lambda_{n-2}(Q'_{n-1}, Q_{n-1}) \approx \cdots\cdots \approx \lambda_o(Q^{*\prime}_1, Q^*_1)$$

$$\lambda_n(Q'_n, Q_n) \approx \cdots\cdots \approx \lambda_1(Q'_1, Q_1) \approx \lambda_o(H', H)$$

$$\lambda_{n+1}(Q'_n, Q_n) \approx \cdots\cdots \quad \lambda_2(Q'_1, Q_1) \approx \lambda_1(H', H)$$

. . . .

. . . .

$$\lambda_{n+p}(Q'_n, Q_n) \approx \cdots\cdots \approx \lambda_{p+1}(Q'_1, Q_1) \approx \lambda_p(H', H)$$

. . . .

. . . .

Or, du point de vue C^o-local, (Q'_n, Q_n) s'identifie à (E', E). D'autre part, on sait que $\lambda_i(H', H) \approx \pi_i(H)$ pour tout $i \geqslant 0$ (puisque les $\mu_i(H', H)$ sont nuls); et il résulte de [1], p. 341, proposition 11, qu'on a pour tout $i \geqslant 0$: $\pi_i(H) \approx \pi_i(G, SO(n+1))$.

Enfin, on peut donner comme suit une interprétation de $\lambda_o(Q'^*_1, Q^*_1)$. Soit $(A^{*\prime}, A^*)$ l'espace de tous les plongements de D^{n-1} dans D^n qui sont tangents à l'application identique le long de S^{n-2}. On a une fibration canonique: $(Q^{*\prime}_1, Q^*_1) \longrightarrow (A^{*\prime}, A^*)$; les λ_i de la fibre sont nuls pour tout $i \geq 0$; on a donc: $\lambda_i(Q^{*\prime}_1, Q^*_1) \approx \lambda_i(A^{*\prime}, A^*)$ pour tout $i \geq 0$. Comme $(A^{*\prime}, A^*)$ est presque contractile, ses λ_i s'identifient à ses π_i; donc finalement: $\lambda_o(Q^{*\prime}_1, Q^*_1) \approx \pi_o(A^*_1)$. Or pour $n \neq 4$, $\pi_o(A^*)$ s'identifie canoniquement au groupe Γ^n. (Ceci est une conséquence facile du fait que pour ces dimensions, la "conjecture de Schönflies différentiable" est vraie, autrement dit, pour tout plongement différentiable de S^n dans R^{n+1}, l'adhérence de la composante connexe bornée de $R^{n+1} - f(S^n)$ est difféomorphe à D^{n+1}; ce résultat a été démontré pour $n \geq 5$ par Smale; cf. [3]).

On a donc, en résumé:

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda_i(E', E) \approx \pi_{i-n}(G, SO(n+1)) & \text{pour} \quad i \geq n \\ \lambda_{n-1}(E', E) \approx \Gamma^n & \\ \lambda_i(E', E) \approx \lambda_o(Q^{*\prime}_{n-i}, Q^*_{n-i}) & \text{pour} \quad 0 < i < n-1 \\ \lambda_o(E', E) = 0 & \end{cases}$$

En reportant dans la suite exacte (1) les résultats de (2), (3) et (5), on obtient le:

Théorème 4.[(2)] Soit n une dimension où les conditions 1) et 2) du début de ce n° sont remplies; soit (G', G) le groupe des difféomorphismes de S^n qui conservent l'orientation; soient Q^*_j les espaces définis ci-dessus. On a une suite exacte:

[(2)] (Note rajoutée sur épreuves). Le théorème 4 peut etre amèlioré comme suit:
Sous les hypothèses du théorème 4, on a des isomorphismes canoniques:

./...

$$\ldots \to \pi_{i-n}(G, SO(n+1)) \to \pi_i(SO(n+1)) \to \pi_i(G') \to \pi_{i-n-1}(G, SO(n+1)) \to \ldots$$

$$\ldots \to \pi_0(G, SO(n+1)) \to \pi_n(SO(n+1)) \to \pi_n(G') \to \Gamma^n \to \pi_{n-1}(SO(n+1)) \to$$

$$\to \pi_{n-1}(G') \to \lambda_0(Q_1^{*\prime}, Q_1^{*}) \quad \ldots \to \pi_1(SO(n+1)) \to \pi_1(G') \to \lambda_0(Q^{*\prime}_{n-1}, Q^{*}_{n-1})$$

$$\to 0 \to \pi_0(G') \to 0$$

Si en plus (comme c'est le cas pour $n = 3$), le groupe G est dense dans le groupe les homéomorphismes de S^n sur S^n conservant l'orientation, on peut, dans la suite exacte ci-dessus, remplacer G' par ce groupe d'homéomorphismes (cf. [2]).

./...

$$\pi_i(G', SO(n+1)) \approx \begin{cases} \pi_{i-n}(G, SO(n+1)) & \text{pour } i \geqslant n+1 \\ \Gamma^n & \text{pour } i = n \\ \lambda_0(Q^{*\prime}_{n-i-1}, Q^{*}_{n-i-1}) & \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. On remarque d'abord que, d'après le lemme de cinq, pour tout espace bitopologique (E', E) tel que $\mu_i(E', E) \approx \pi_i(E')$ pour tout $i \geqslant 0$, on a aussi, pour tout $i \geqslant 1$, un isomorphisme canonique $\lambda_{i-1}(E', E) \approx \pi_i(E', E)$, où $\pi_i(E', E)$ designe le i-ème groupe d'homotopie de l'application d'injection $E \to E'$.
On conidére ensuite le diagramme commutatif canonique

$$\begin{array}{ccc} SO(n+1) & \longrightarrow & G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Les fléches verticales induisent des isomorphismes sur les groupes d'homotopie: c'est classique pour la flèche de gauche, et pour la flèche de droite, cela rèsulte du théorème 2 et du 2° ci-dessus ~~du théorème~~ 3. Donc, d'après le lemme de cinq, on a un isomorphisme canonique $\pi_i(E', E) \approx$
$\approx \pi_i(G', SO(n+1))$, ce qui, compte tenu de (5), achève la démonstration.

B i b l i o g r a p h i e.

[1] J. CERF, Topologie de Certains Espaces de Plongements, Bull. Soc. Math. de France, 1961.

[2] J. CERF, Groupes d'homotopie locaux, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 1961, t. 252, p. 4093; et t. 253, p. 363.

[3] S. SMALE, On the structure of Manifolds, Ann. of Maths.

[4] R. THOM, La classification des immersions d'après Smale, Seminaire Bourbaki.